JURNAL

Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Pada Pertumbuhan Penduduk Di Kabupaten Kediri

Oleh:

WAWAN HARIANTO

12.1.01.05.0115

Dibimbing oleh :

1. **Bambang Agus Sulistyono, M.Si**
2. **Ratna Yulis Tyaningsih, M.Pd**

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI

TAHUN 2017

SURAT PERNYATAAN
ARTIKEL SKRIPSI TAHUN 2017

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Lengkap	: Wawan Harianto
NPM	: 12.1.01.05.0115
Telepun/HP	: 085745009984
Alamat Surel (Email)	: wharianto33@gmail.com
Judul Artikel	: Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Pada Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Kediri
Fakultas – Program Studi	: FKIP-Pendidikan Matematika
Nama Perguruan Tinggi	: Universitas Nusantara PGRI Kediri
Alamat Perguruan Tinggi	: KH. Achmad Dahlan No.76 Kediri

Dengan ini menyatakan bahwa :

a. artikel yang saya tulid merupakan karya saya pribadi (bersama tim penulis**)** dan bebas plagiarisme;
b. artikel telah diteliti dan disetujui untuk diterbitkan oleh Dosen Pembimbing I dan II.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya. Apabila di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian data dengan pernyataan ini dan atau ada tuntutan dari pihak lain, saya bersedia bertanggungjawab dan diproses sesuai dengan ketentuan yang berlaku.

Mengetahui		Kediri, 18 Januari 2017
Pembimbing I	Pembimbing II	Penulis,
Bambang Agus Sulistyono, M.Si NIDN. 0713087101	Ratna Yulis Tyaningsih, M.Pd. NIDN. 0709079001	Wawan Harianto NPM. 12.1.01.05.0115

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL POPULASI KONTINU PADA PERTUMBUHAN PENDUDUK DI KABUPATEN KEDIRI

Wawan Harianto
12.1.01.05.0115
FKIP-Pendidikan matematika
wharianto33@gmail.com
1. Bambang Agus Sulistyono, M.Si
2. Ratna Yulis Tyaningsih, M.Pd
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendiskripsikan aplikasi persamaan diferensial model populasi kontinu pada simulasi laju pertumbuhan penduduk di kabupaten Kediri dan mengetahui keakuratan model populasi logistik untuk memprediksi jumlah kabupaten Kediri pada suatu waktu tertentu jika dibandingkan dengan model populasi eksponensial. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Peneliti sebagai subyek penelitian melakukan observasi tentang pemodelan matematika pada pertumbuhan penduduk di kabupaten Kediri dengan persamaan diferensial. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa model eksponensial yang dipilih adalah model eksponensial 3 dengan bentuk persamaan $P(t) = 1.235.026\, e^{(0,0064739469)(t)}$ dan laju pertumbuhan penduduknya 0,65% pertahun. Pada model logistik bentuk persamaannya $P_{(t)} = \frac{1.490.439,5114162}{1+(0,206808260)e^{-0,06332195265(t)}}$ dan laju pertumbuhan penduduknya 6,3% pertahun. Prediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada sensus penduduk 2020 berdasarkan hasil model eksponensial sebesar 1.600.074 jiwa, untuk model logistik 1.487.995. Dengan demikian model populasi eksponensial lebih akurat untuk memprediksi jumlah penduduk di kabupaten Kediri jika dibandingkan dengan model logistik.

KATA KUNCI : Persamaan Diferensial, Model Populasi Kontinu, Pertumbuhan Penduduk

I. LATAR BELAKANG

Pertumbuhan penduduk kini semakin tidak dapat dikendalikan. Berkaitan dengan itu, diperlukan pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu untuk memprediksi jumlah pertumbuhan penduduk. Salah satu ilmu bantu yang digunakan adalah matematika. Untuk memprediksi jumlah penduduk, diperlukan pemodelan matematika yang tepat dan akurat.

Model matematika yang digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk adalah pemodelan dengan persamaan diferensial model populasi kontinu.Terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi diantaranya model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Kontinu dalam hal ini berarti populasi bergantung waktu tanpa putus. Dari waktu ke waktu bentuk tiap model dimodifikasi sehingga dapat

menggambarkan dengan lebih teliti keadaan sebenarnya.

Berdasarkan pengamatan yang dilakukan, model populasi kontinu yang digunakan BPS kabupaten Kediri untuk memprediksi jumlah populasi penduduk kabupaten Kediri pada tiap periode sensus penduduk adalah dengan menggunakan model eksponensial. Model ini diasumsikan bahwa populasi bertambah dengan laju pertumbuhan populasi yang sebanding dengan besarnya populasi. Meskipun model tersebut sangat tepat untuk memodelkan pertumbuhan populasi dalam kondisi ideal, namun harus disadari bahwa sebuah model yang lebih realistik harus mencerminkan fakta bahwa suatu lingkungan mempunyai sumber daya yang terbatas. Oleh karenanya diperlukan model populasi logistik untuk membandingakan model populasi yang tepat diterapkan untuk memprediksi jumlah populasi penduduk di kabupaten Kediri. Permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana aplikasi persamaan differensial model populasi kontinu pada laju pertumbuhan penduduk di kabupaten Kediri?
2. Bagaimanakah keakuratan model populasi logistik untuk memprediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada sensus 2020 jika dibandingkan dengan model populasi eksponensial yang telah diterapkan oleh BPS kabupaten Kediri?

Dalam penelitian ini data yang diteliti adalah data jumlah penduduk kabupaten Kediri dari hasil sensus penduduk sejak tahun 1980-2010. Persamaan diferensial model populasi kontinu yang digunakan dalam penelitian ini adalah model populasi eksponensial dan model populasi logistik.

1. Model Populasi Eksponensial

Model populasi eksponensial diasumsikan bahwa laju pertumbuhan terhadap waktu berbanding lurus dengan jumlah populasi yang ada.

Misalkan $P(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t dan diketahui bahwa jumlah populasi saat $t = 0 = t_0$ adalah P_0

, maka model matematikanya dapat dituliskan :

$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = aP}$ **;** dimana *a* konstan

Solusi jumlah populasi *P* pada saat *t* atau *P*(*t*) berdasarkan (2.4) :

$\int \frac{dP}{P} = \int a\, dt$

$\ln P = at + C$

$P(t) = e^{at+c}$

$P(t) = e^{at}.e^{c}$

$P(t) = C_1 e^{at}$

Karena $P(t_0) = P_0 = C_1 e^{a(0)} = C_1$, maka :

$\boldsymbol{P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}}$

dimana

a : daya tumbuh suatu populasi (*intrinsic growth rate*) / perbedaan antara angka kelahiran dan kematian per kapita (*a* = angka kelahiran tahunan perkapita-angka kematian tahunan perkapita) / laju pertumbuhan populasi perkapita.

2. Model Populasi Logistik

Model populasi logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik. Model ini mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*), pada titik inijumlah kelahiran dan kematian dianggap sama.

Suatu model logistik diawali dengan model pertumbuhan eksponensial dan menciptakan suatu ekspresi yang mengurangi nilai *a* ketika *P* meningkat. Jika ukuran populasi maksimum yang dapat dipertahankan adalah $\frac{a}{b}$, maka $(\frac{a}{b} - P)$ akan memberikan petunjuk berapa banyak individu tambahan yang dapat ditampung oleh lingkungan tersebut, dan $\left(\frac{\frac{a}{b}-P}{\frac{a}{b}} = \frac{\alpha - bP}{a}\right)$ memberikan petunjuk berupa $\frac{a}{b}$ yang masih tersedia untuk pertumbuhan populasi.

Persamaan yang telah dimodifikasi menggunakan syarat baru adalah :

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(\frac{a-bP}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2 P - \alpha b P^2}{a} = aP - bP^2$$

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = aP - bP^2}$$

Model ini merupakan persamaan differensial nonlinear yang mempunyai solusi :

$$\frac{dP}{\alpha P - bP^2} = dt$$

$$\int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{P}+\frac{b}{a-bP}\right)dP = \int dt$$

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{1}{P}dP + \int \frac{b}{a-bP}dP\right) = t + c$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{a}\left(\ln P - \ln(a-bP)\right) = t + c}$$

Diketahui bahwa jumlah populasi saat $t = 0 = t_0$ adalah P_0 , maka :

$$c = \frac{1}{a}(\ln P_0 - \ln(a - \mathrm{b}P_0))$$

Dengan mensubstitusi nilai c, persamaan diatas menjadi :

$$\ln\frac{P}{a-bP} - \ln\frac{P_0}{a-\mathrm{b}P_0} = a\mathrm{t}$$

$$\ln\frac{P(a-bP_0)}{P_0(a-bP)} = at$$

Dengan melakukan pengeksponensialan pada kedua ruas, diperoleh :

$$\frac{P(a-bP_0)}{P_0(a-bP)} = e^{at}$$

$$P_0(a-bP)e^{at} = P(a-bP_0)$$

$$aP_0e^{at} - bPP_0e^{at} = P(\alpha - bP_0)$$

$$aP_0e^{at} = P(\alpha - bP_0) + P(bP_0e^{at})$$

$$aP_0e^{at} = P(a - bP_0 + bP_0e^{at})$$

$$P = \frac{aP_0e^{at}}{(a - bP_0 + bP_0e^{at})} \text{ (bagi dengan } bP_0e^{at})$$

$$= \frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{a-bP_0}{bP_0}\right)\frac{1}{e^{kt}}}$$

$$= \frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{a}{bP_0}-1\right)\frac{1}{e^{at}}}$$

$$P(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{\frac{a}{b}}{P_0}-1\right)e^{-at}}$$

Substitusikan nilai K = $\frac{a}{b}$ ke dalam persamaan diatas

$$P(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K}{P_0}-1\right)e^{-at}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-at}}$$

Substitusikan $A = \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)$ ke dalam persamaan (2.8)

$$\boldsymbol{P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-at}}}$$

Persamaan diatas dikenal sebagai Model populasi logistik.

A. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penilitian kualitatif yang dimaksudkan untuk mengaplikasikan persamaan diferensial model populasi kontinu pada pertumbuhan penduduk di kabupaten Kediri khususnya model populasi eksponensial dan model populasi logistik.

Dalam penelitian ini, data-data yang diperoleh melalui metode pengamatan, wawancara dan mengumpulkan dokumen-dokumen yang berkaitan dengan penelitian. Pengamatan dilakukan untuk mengetahui model populasi kontinu yang digunakan untuk memprediksi jumlah populasi penduduk kabupaten Kediri. Wawancara dilakukan untuk menggali data mengenai jumlah populasi penduduk di kabupaten Kediri. Dokumen yang digunakan bersumber

dari buku dan internet serta dokumentasi yang berkaitan dengan penelitian ini.

Jenis penelitian yang digunakan adalah grounded theory. Grounded theory yang dimaksud dalam penelitian ini adalah membandingkan hasil dari perhitungan model populasi kontinu eksponensial dan model populasi kontinu logistik untuk menghasilkan suatu teori yang cocok digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri.

Langkah awal yang dilakukan peneliti adalah mengumpulkan data mengenai persamaan diferensial dan data jumlah populasi penduduk kabupaten Kediri dari hasil sensus penduduk pada tahun 1980-2010. Setelah data terkumpulpul, data dari hasil penelitian dimodelkan ke dalam bentuk persamaan diferensial.

B. Hasil Penelitian

Data dari hasil penelitian diperoleh berupa jumlah penduduk kabupaten Kediri dari hasil sensus penduduk pada tahun 1980-2010. Berikut ini adalah tebel 1 yang menyatakan jumlah penduduk kabupaten Kediri.

Tabel .1
Jumlah populasi penduduk kabupaten Kediri

Tahun	Populasi
1980	1.235.026
1990	1.342.998
2000	1.408.353
2010	1.499.768

Berdasarkan tabel terlihat bahwa sejak tahun 1980 sampai 2010 jumlah penduduk Kabupaten Kediri mengalami kenaikan.

3.1 Penyelesaian Model Populasi Eksponensial

Untuk menyelesaikan model eksponensial dengan data jumlah penduduk Kabupaten Kediri seperti tertera pada tabel , sebelumnya diasumsikan terlebih dahulu waktu (t) diukur dalam dan dimisalkan t = 0 pada tahun 1980. Maka syarat awal adalah P_0 = 1.235.026, sehingga bentuk umum penyelesaiannya adalah :

$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}$ dengan

$P_0 = 1.235.026$ menjadi

$P(t) = 1.235.026\, e^{a(t-t_0)}$

Berikut ini adalah hasil model populasi eksponensial:

1. Model eksponensial I, bentuk persamaannya $P(t) = 1.235.026\, e^{0,00838079382(t-t_0)}$, dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah sekitar 0,84% pertahun.
2. Model eksponensial II, bentuk persamaannya $P(t) = 1.235.026\, e^{0,006564457(t-t_0)}$, dengan laju pertumbuhan

relatifnya adalah sekitar 0,66% pertahun.

3. Model eksponensial III, bentuk persamaannya $P(t) = 1.235.026\, e^{0,0064739469(t-t_0)}$, dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah sekitar 0,65% pertahun.

Tabel 2
Perbandingan hasil sensus penduduk dan model eksponensial

Tahun	Hasil Sensus	Model Eksponensial		
		I	II	III
1980	1.235.026	1.235.026	1.235.026	1.235.026
1990	1.342.992	1.342.992	1.318.819	1.317.626
2000	1.408.353	1.460.396	1.408.297	1.405.750
2010	1.499.768	1.588.064	1.503.846	1.499.768

P_0,P_1, dan P_2 berturut-turut adalah 1.235.026, 1.342.992, dan 1.408.353. Untuk mengetahui daya tampung maksimun di kabupaten kediri maka substitusikan nilai P_0,P_1, dan P_2 ke dalam persamaan $P_{max} = \lim_{t\to\infty} P = \frac{a}{b} = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{{P_1}^2 - P_0P_2}$. Daya tampung maksimun kabupaten Kediri adalah sekitar 1.490.436 jiwa.

Laju pertumbuhan penduduk kabupaten Kediri diperoleh dengan mensubstitusikan nilai P_0,P_1, dan P_2 ke dalam persamaan $e^{-a} = \frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)}$, sehingga diperoleh laju pertumbuhan relatifnya sekitar 6,3% pertahun.

Untuk memperoleh prediksi populasi, substitusikan nilai P_0, A, e^{-a}, dan K ke dalam persamaan $P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-at}}$. Solusi persamaan logistik untuk memprediksi jumlah populasi penduduk di kabupaten kediri adalah $P(t) = \frac{1.490.435,5114162}{1+0,2068008260e^{-0,6332195265\,t}}$.

Tabel perbandingan jumlah penduduk Kabupaten Kediri berdasarkan hasil sensus penduduk dengan hasil model logistik

Tabel 3.
Perbandingan hasil sensus penduduk dan model logistic

Tahun	Sensus	Model Logistik
1980	1.235.026	1.235.026
1990	1.342.992	1.342.992
2000	1.408.353	1.408.353
2010	1.499.768	1.445.706

Berdasarka tabel 3, terlihat bahwa model logistik sangat akurat untuk memprediksi jumlah penduduk pada tahun 1990 dan tahun 2000. Tahun 2010 jumlah

penduduk kabupaten Kediri menurut sensus penduduk sudah melebihi dari daya tampung kabupaten Kediri yang dihitung menggunakan model logistik. Sehingga prediksi dengan menggunakan model logistik tidak akurat lagi untuk menghitung populasi penduduk pada tahun 2010.

4. Perbandingan model populasi eksponensial dan model populasi logistic

Berdasarkan penyelesaian kedua model di atas diperoleh model populasi kontinu yang memiliki keakuratan cukup signifikan dengan data sesungguhnya (data hasil sensus penduduk oleh BPS kabupaten Kediri) yaitu model Eksponensial IV yang memiliki solusi $P(t) = 1.235.026\, e^{(0,0064739469)(t)}$ dengan laju pertumbuhan penduduk 0,65% pertahun dan model logistik yang memiliki solusi persamaan $P_{(t)} = \frac{1.490.439,5114162}{1+(0,206808260)e^{-0,06332195265(t)}}$ dengan laju pertumbuhan penduduk 6,3% pertahun.

Tabel 4 Perbandingan hasil sensus penduduk model eksponensial dan model logistik

Tahun	Sensus	Model Eksponensial	Model Logistik
1980	1.235.026	1.235.026	1.235.026
1990	1.342.992	1.317.626	1.342.992
2000	1.408.353	1.405.750	1.408.353
2010	1.499.768	1.499.768	1.445.706

Berdasarkan tabel 4 diatas model ekponensial dan logistik dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada tahun 2020. Prediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada sensus penduduk 2020 berdasarkan hasil model eksponensial adalah 1.600.074 jiwa. Pada model logistik, prediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada sensus penduduk 2020 sebesar 1.487.995 jiwa.

C. Penutup

1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Persamaan diferensial model populasi kontinu jika diaplikasikan pada pertumbuhan penduduk kabupaten Kediri dapat diperoleh dengan dua model populasi yaitu model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Untuk model populasi eksponensial yang cocok dengan data hasil sensus penduduk oleh BPS kabupaten Kediri adalah model populasi eksponensial IV yang memiliki solusi persamaan $P(t) = 1.235.026\, e^{(0,0064739469)(t)}$ dengan laju pertumbuhan penduduk 0,65% pertahun. Sedangkan dengan model populasi logistik yang memiliki solusi persamaan $P_{(t)} = \frac{1.490.439,5114162}{1+(0,206808260)e^{-0,06332195265(t)}}$ dengan laju pertumbuhan penduduk 6,3% pertahun.
2. Model populasi logistik kurang efektif jika diterapkan untuk memprediksi jumlah populasi penduduk kabupaten Kediri dalam jangka waktu yang panjang jika dibandingkan dengan model populasi eksponensial. Jika menggunakan model populasi logistik prediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada tahun 2010 adalah 1.445.706. Jika menggunakan model populasi eksponensial prediksi jumlah penduduk kabupaten Kediri pada tahun 2010 adalah 1.499.768. Model populasi eksponensial lebih akurat jika diterapkan untuk memprediksi jumlah penduduk di kabupaten Kediri dalam jangka waktu yang lebih panjang.

2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian dan kesimpulan yang diperoleh, maka beberapa saran yang dapat dikemukakan diantaranya sebagai berikut:

1. Peneliti lain jika ingin melakukan penelitian yang serupa atau ingin melanjutkan kembali penelitian ini sebaiknya menggunakan model populasi kontinu yang lebih baru dan dapat

menghasilkan prediksi jumlah penduduk di suatu wilayah pada suatu waktu tertentu yang lebih akurat dan praktis digunakan.

2. Peneliti lain jika ingin melakukan penelitian yang serupa sebaiknya juga membuat software yang lebih praktis dan menghasilkan penghitungan yang lebih efektif dan lebih akurat

Daftar Pustaka

Afninisrina. 2013. *Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Pada Pertumbuhan Penduduk di Jombang*. (Online), tersedia : http://ejurnal.stkipjb.ac.id/index.php/AS/article/viewFile/190/126., diunduh 17 Desember 2014

Arikunto, Suharsimi. 2013. *Dasar – Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta : Bumi Aksara.

Herdiana, H., Sukasno., E. Kusmana. 2002. *Persamaan Differensial*. Bandung : Pustaka Setia.

Jannah, Arina Firdausil. 2008. *Analisis Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Untuk Spesies Tunggal*. Skripsi S-1 Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Katalog BPS. 1980. *Penduduk Kabupaten Kediri 1980*. Kediri : BPS Kediri.

Katalog BPS. 1990. *Penduduk Umur Tunggal Kabupaten Kediri Hasil Sensus Penduduk 1990*. Kediri : BPS Kediri.

Katalog BPS. 2000. *Karakteristik Penduduk Kabupaten Kediri*. Kediri : BPS Kediri.

Katalog BPS. 2010. *Karakteristik Penduduk Kabupaten Kediri (Hasil SP2010)*. Kediri : BPS Kediri.

Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta : Erlangga.

Maulana, Adi Sulton. 2013. *Penerapan Strategi React Untuk Meningkatkan Kemampuan Koneksi Matematis*. Universitas Pendidikan Indonesia.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg and Steven E. Rigdon. 2004. *Kalkulus Edisi Kedelapan*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Ph.D. Bandung : Erlangga.

Sugiyarto, Ph.D. 2015. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Binafsi Publisher

Sugiyono. 2013. *Metode Penelitian Pendidikan*. Bandung : Alfabeta.

Suherman, E.et al. 2001. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: JICA-Universitas Pendidikan Indonesia.

Suherman, Erman. 2003. *Common Textbook(Edisi Revisi)Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.

Wahyullah, Arief. 2009. *Model Logistik dengan Penundaan pada Spesies Tunggal*. Skripsi S-1 Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.